

Flader

Søren Fuglede Jørgensen

11. november 2014

Resumé

I noterne her vil vi betragte begrebet *flade* fra et par forskellige synspunkter samt beskrive forskellige eksempler på flader. Vi vil desuden se på det klassiske og fundamentale resultat, der kendes som “klassifikationen af flader”, og som fortæller os præcis, hvor mange forskellige flader, der findes.

Forord

Noterne følger rundt regnet de første 30 sider af William S. Massey’s bog *Algebraic Topology: An Introduction*¹. Specielt er alle billederne i afsnit 4.1 og 4.2 taget fra bogen. Bogen er skrevet til universitetsstuderende på andet år og kan som sådan være lidt svær at gå til; den er imidlertid også meget pædagogisk og med Wikipedia ved hånden, vil den kunne forstås af en tilstrækkeligt flittig gymnasistuderende. Noterne her forsøger at uddrage de essentielle punkter fra bogen uden at forville sig ud i de forskellige tekniske detaljer. Den nyeste kopi af noterne vil være at finde på <http://fuglede.dk/da/maths/notes/other/>. Tøv ikke med at kontakte mig på s@fuglede.dk, skulle der være spørgsmål eller kommentarer til indholdet af noterne her eller til teorien bag dem generelt.

Indhold

1	Flader – den tekniske definition	2
2	Flader – arbejdsdefinitionen	3
3	Eksempler	5
4	Klassifikationssætningen	8
4.1	Sammenhængende sum på en ny måde	8
4.2	Beviset for sætningen	11
5	Perspektiver	17
5.1	Invarianter af flader	17
5.2	Klassifikation i andre dimensioner	18
6	Opgaver	20

¹Bogen kan findes på Google Books: <http://books.google.com/books?id=IX0dhDDHezgC>

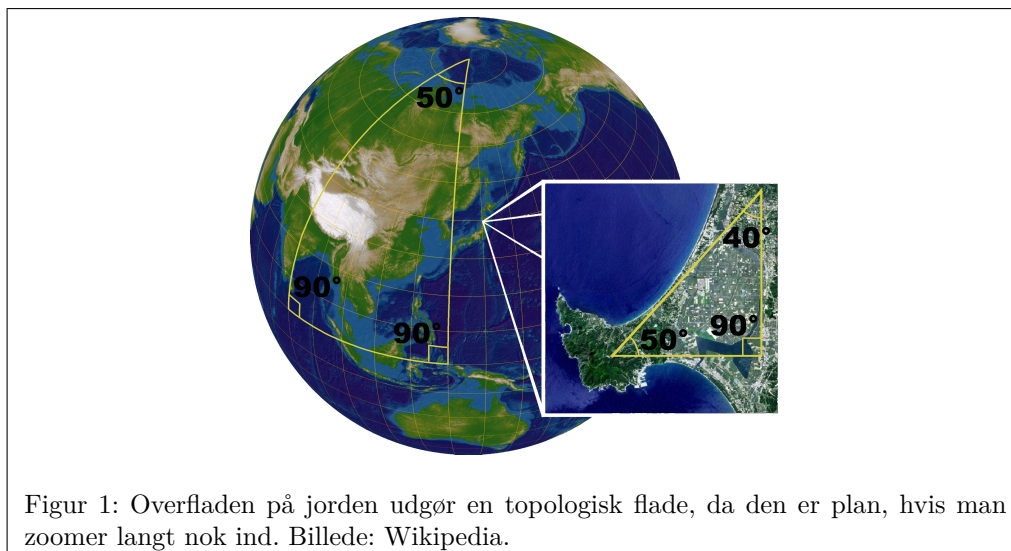
1 Flader – den tekniske definition

Matematikere forstår abstrakte objekter ved at tænke på dem fra så mange forskellige sider som overhovedet muligt. Således vil vi til at starte med introducere flader på to forskellige måder og give to forskellige definitioner. I den sidste af de to definitioner vil vi tænke på flader som noget, man kan få ved at lime trekanter i planen sammen på bestemte måder. Denne definition er essentielt den eneste vi har brug for, men det ville være en forbrydelse mod teorien ikke også at give den følgende mere tekniske definition, som er den, matematikere typisk har i hovedet, når de bruger flader til lidt mere avancerede formål.

Definition 1. En *topologisk flade* S er et “Hausdorffrum” med den egenskab, at ethvert punkt i S har en “åben omegn”, der er “homøomorft” med et kvadrat i planen.

Den første observation man gør sig om denne definition er, at den ikke rigtig giver nogen mening, medmindre man kender alle ingredienserne. At komme ind på de nærmere detaljer her i noterne ville føre os for vidt², så lad os i stedet diskutere betydningen af begreberne: At to ting er *homøomorfe* vil sige, at de kan deformeres over i hinanden: F.eks. er en firkant og en cirkel homøomorfe, da man kan deformere en firkant til en cirkel ved at trykke lidt på hjørnerne. Et andet klassisk eksempel er, at en munkering og en kaffekop er homøomorfe, da man kan lave en munkering til en (temmelig middelmådig) kaffekop ved at udhule den et sted³; hullet spiller så rollen af hanken i kaffekoppen – vi vender tilbage til dette begreb senere. Når vi så kræver, at et punkt på den topologiske flade S har en omegn, der er homøomorft med et kvadrat i planen, vil det sige, at hvis vi zoomer tilstrækkeligt langt ind på punktet, vil fladen begynde at ligne et kvadrat.

Eksempel 2. Overfladen af jorden er en topologisk flade: Hvorimens vi tænker på selve jordkloden som sfærisk, vil den, hvis man zoomer tilstrækkeligt langt ind begynde at se flad ud. Det er det, vi udnytter, når vi laver kort over forskellige områder på jorden. Se Figur 1.



Bemærkning 3. I eksemplet ovenfor så vi en topologisk flade, som vi naturligt tænker på som noget 3-dimensionalt. Der er imidlertid intet i definitionen der kræver, at vi tænker på topologiske flader

²De interesserede kan med fordel kaste et blik på følgende artikler:

Topologi: <http://da.wikipedia.org/wiki/Topologi>

Topologisk rum: http://da.wikipedia.org/wiki/Topologisk_rum

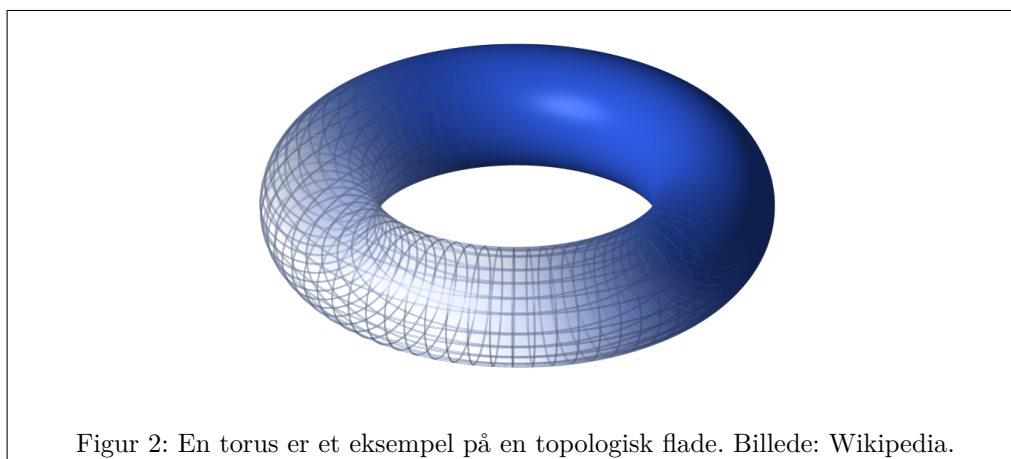
Homøomorfi : <http://da.wikipedia.org/wiki/Homøomorfi>

Hausdorffrum: <http://da.wikipedia.org/wiki/Hausdorffrum>

³Se http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mug_and_Torus_morph.gif for en animation.

på den måde, og som vi vil se senere, viser det sig at være en begrænsning at gøre det. Det er heller ikke essentielt, at vi har krævet, at det er et kvadrat, som de topologiske flader skal ligne, når man zoomer langt nok ind, men det er nok det mest vante fra eksemplet med jordoverfladen og kortene.

Eksempel 4. Et andet eksempel, som vi allerede har været inde på, er en munkering (eller mere præcist en *torus*) som vist på Figur 2. Denne kan man også forestille sig ligner et område i planen, når der zoomes tilstrækkeligt langt ind.



2 Flader – arbejdsdefinitionen

Vi vender os nu væk fra den tekniske definition og mod den, vi rent faktisk agter at bruge til noget. Som motivation betragter vi to trekanter T_1 og T_2 i planen. Vi forestiller os, at trekanterne er lavet af et fleksibelt materiale, og at vi kan lime trekanternes kanter sammen som vist på Figur 3. På figuren sker der på to forskellige måder det, at kant a i T_1 limes på kant a i T_2 , således at pilene på de to kanter falder sammen; tilsvarende sammenlimes b -kanterne og c -kanterne. Af figuren fremgår, at vi på denne måde kan producere forskellige objekter – f.eks. en sfære og en torus. Vi ledes herved til følgende definition:

Definition 5. En *trianguleret flade* S består af en endelig mængde trekanter $T_1, T_2, \dots, T_n$ i planen sammen med information om, hvordan disse skal limes sammen. Vi lægger følgende krav på trianguleringer: Efter sammenlimning vil der om to forskellige trekanter, lad os kalde dem T_i og T_j , enten gælde at

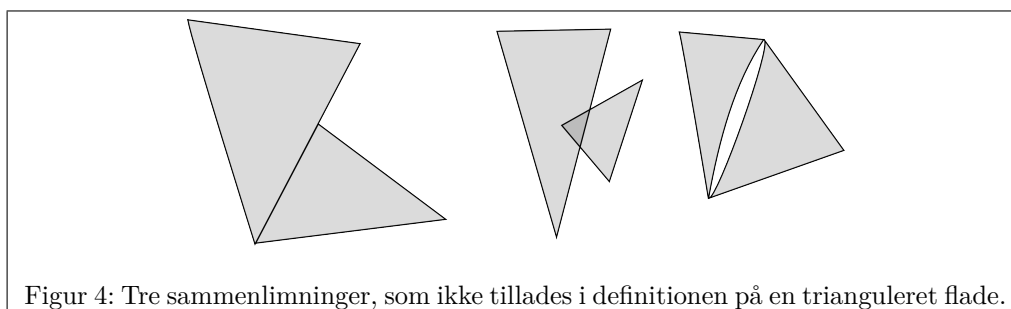
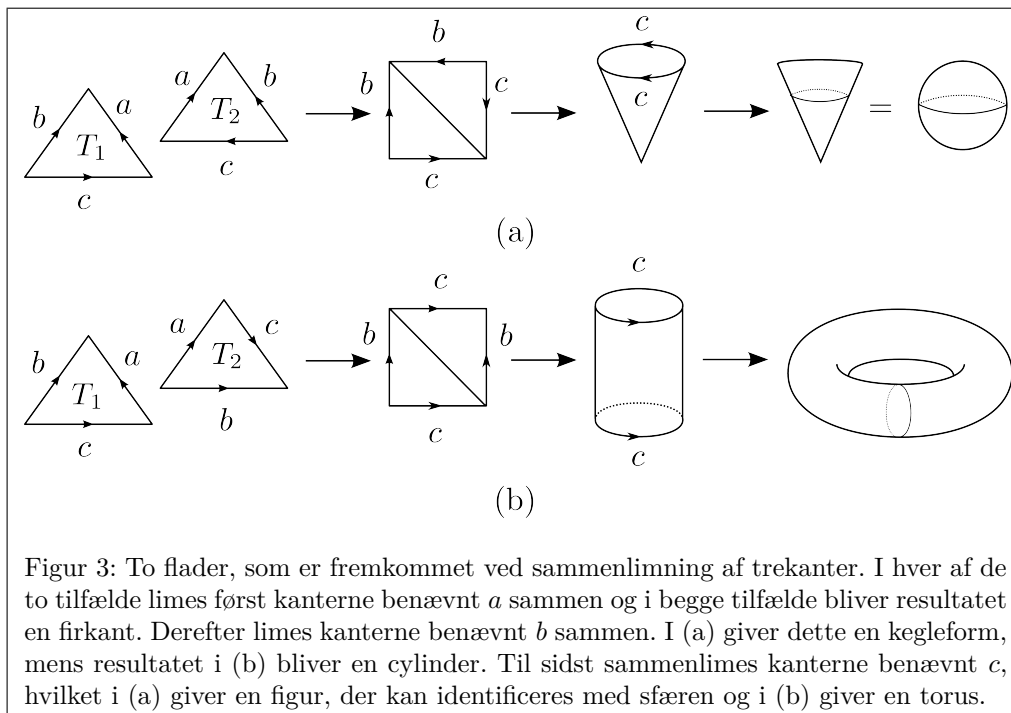
- de er disjunkte; det vil sige, at de ikke har nogen punkter tilfælles, eller
- de har et enkelt hjørne tilfælles, eller
- de har en eller flere kanter tilfælles.

Derudover kræver vi, at ingen kant deles af mere end to trekanter, og endelig kræver vi, at fladerne er sammenhængende i den forstand, at alle trekanter bliver forbundet i én gruppe.

Betingelsen i definitionen her er måske nemmest at forstå ved at betragte Figur 4, der viser tre forbudte sammenlimninger. Ligesom før vil vi ikke skelne mellem flader, der efter sammenlimning kan deformeres kontinuert over i hinanden.

Det næste resultat fortæller os, at vi ikke behøver skelne mellem de to forskellige definitioner på flader, og fra nu af vil vi blot henvise til objekterne som *flader*. Vi vil ikke bevise resultatet, da det vil føre os for vidt.

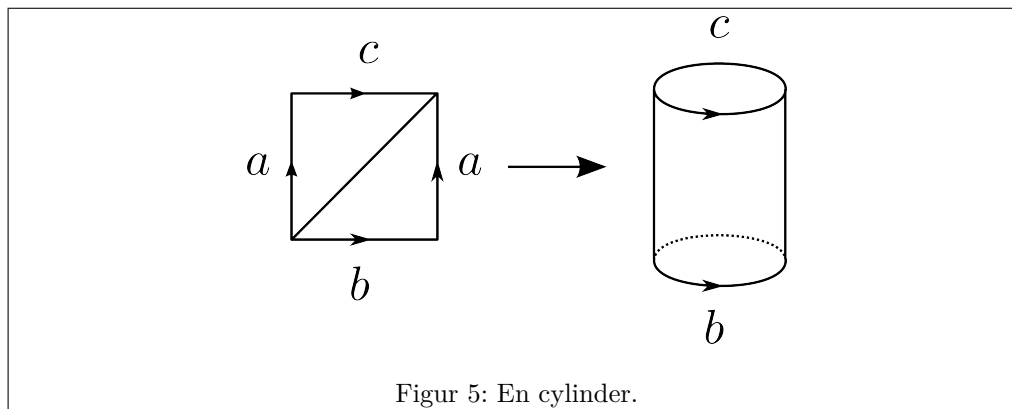
Sætning 6 (Radó, 1925). *Enhver topologisk flade opstår som en trianguleret flade.*



3 Eksempler

Målet med noterne her vil være at give en beskrivelse af præcis hvor mange flader der findes – det virker f.eks. rimeligt, at vi har mindst to forskellige, nemlig sfæren og torussen, men er de virkelig forskellige, og hvor mange andre findes? Før vi svarer på det spørgsmål, kigger vi på andre mulige resultater af sammenlimninger af flader.

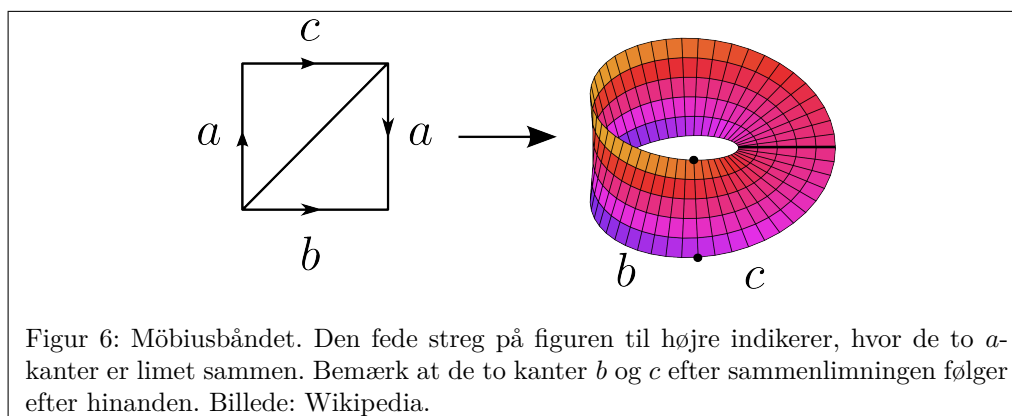
Eksempel 7. På Figur 5 vises en *cylinder* som et resultat af sammenlimning af to trekanter, hvor vi lader to kanter være frie (modsat ved torussen).



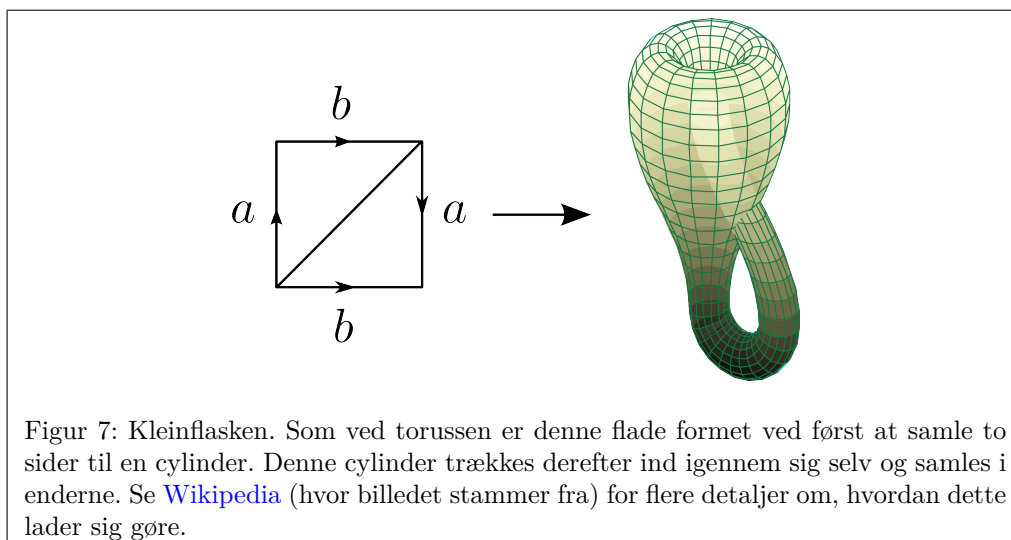
Vi vil primært være interesserede i flader, hvor ingen kanter er frie og giver disse et specielt navn.

Definition 8. En flade kaldes *lukket*, hvis enhver kant er limet på en anden kant.

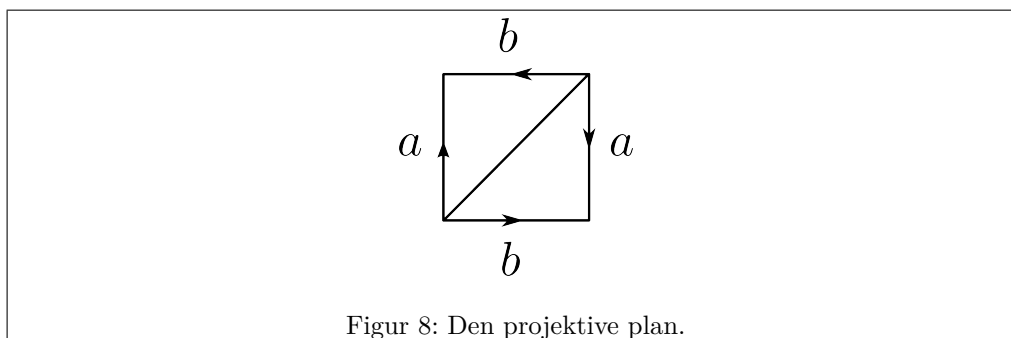
Eksempel 9. Lad os eksemplificere et andet fænomen. Betragt som på Figur 6 resultatet af den sammenlimning, der er magen til den som ved cylinderen, men hvor de to sammenlignede kanter er vendt om i forhold til hinanden. Den resulterende flade kendes som *Möbiusbåndet* og har den særlige egenskab, at et dyr, der står på den ene side af fladen og går i en cirkel rundt, ville komme ud på den anden side, således at man dårligt kan tale om en inder- og yderside, som man ellers har kunnet ved de øvrige eksempler. En flade med denne egenskab kaldes *ikke-orienterbar*, og en flade, der ikke har denne egenskab, kaldes naturligt nok *orienterbar*. Mere præcist er en flade altså ikke-orienterbar, hvis den indeholder et Möbiusbånd.



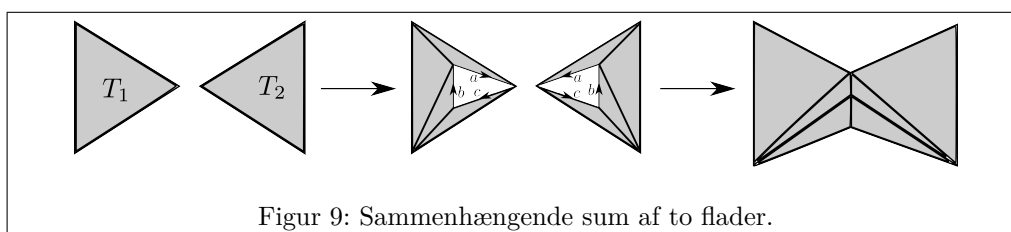
Eksempel 10. Lad os give et eksempel på en flade, der både er lukket og ikke-orienterbar. På Figur 7 ses den såkaldte Kleinflaske. Det fremgår af figuren, at vi umuligt kan lave sammenlimningen,



uden at fladen kommer til at skære sig selv. Dette problem illustrerer, at det er en begrænsning at tænke på flader som krumme objekter i 3 dimensioner, og at vi er nødt til at abstrahere yderligere. Der er faktisk en sætning, kaldet Whitneys indlejringssætning⁴, som fortæller at alle flader kan lægges ind i 4-dimensionalt rum uden selvgennemskæringer, men det er ikke noget, vi her vil komme ind på.



Et måske endnu mere underligt eksempel på en ikke-orienterbar flade er sammenlimningen vist på Figur 8, der muligvis er endnu sværere at forestille sig. Den resulterende flade kaldes *den projektive plan* og spiller en nøglerolle i vores bestemmelse af samtlige flader.

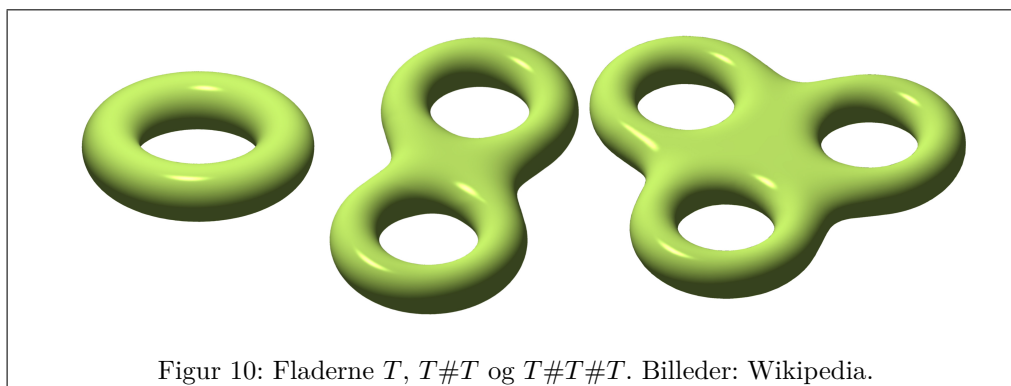


Eksempel 11. Som et sidste eksempel vil vi se, hvordan man fra to givne flader kan konstruere en tredje. Idéen er den følgende: Tag to lukkede flader S_1 og S_2 og vælg små diske (udfyldte cirkler) i hver af dem. Fjern de to diske, så resultatet bliver to flader med cirkelkanter, og lim

⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Whitney_embedding_theorem

disse to cirkler sammen, så fladerne hænger sammen. Resultat bliver en ny flade S , der kaldes den *sammenhængende sum* af S_1 og S_2 og betegnes $S = S_1 \# S_2$. I termer af triangulerede flader, kan sammenhængende sum forstås som på Figur 9: Vælg en trekant T_1 i S_1 og en trekant T_2 i S_2 . Fra hver af de to trekanter fjernes en trekant, og vi indfører nye undertrekanter, så vi er sikre på stadig at have trianguleringer. I både T_1 og T_2 vil der være tre frie kanter, a , b og c , efter vi har fjernet de to trekanter, og T_1 og T_2 limes sammen langs disse kanter, således at trekanterne kommer til at hænge sammen. Væk fra trekanterne ændres S_1 og S_2 ikke.

Lad T betegne torussen. På Figur 10 er vist T , $T \# T$ og $T \# T \# T$. Vi vender tilbage til disse flader lidt senere.



Figur 10: Fladerne T , $T \# T$ og $T \# T \# T$. Billeder: Wikipedia.

Som en udfordrende øvelse, som vi får brug for lidt senere, kan læseren overveje det følgende.

Øvelse 12. Den sammenhængende sum af en torus og en projektiv plan er det samme som den sammenhængende sum af tre projektive planer.

4 Klassifikationssætningen

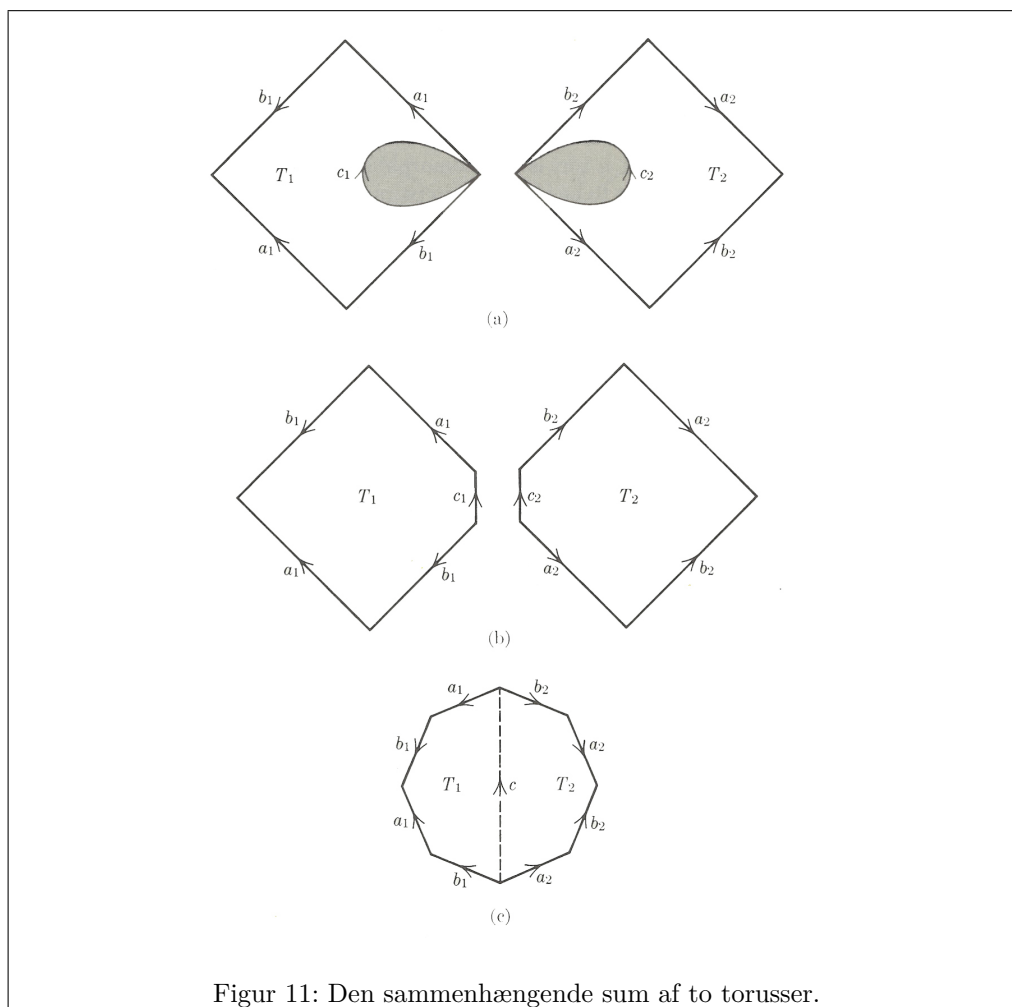
Et helt fundamentalt spørgsmål, der gennemsyrer alle grene af matematikken, er *klassifikations-spørgsmålet*: Hvor mange af en bestemt slags objekter findes der? Vi vil give en del af svaret, når de objekter, vi ser på, er flader.

Sætning 13. *Enhver lukket flade er enten en sfære, en sammenhængende sum af et antal torusser, eller en sammenhængende sum af projektive planer.*

Bemærkning 14. Bemærk at sætningen her kun siger noget om, hvor mange flader der i hvert fald højst kan være, men ikke noget om *præcist* hvor mange der er; man kunne forestille sig, at nogle af dem der nævnes rent faktisk viser sig at være den samme flade – f.eks. at en bold kunne deformeres til en munkering, hvilket umiddelbart lyder usandsynligt. Det viser sig da også, at fladerne i sætningen er præcist de forskellige flader, der findes. Med andre ord at de er de eneste, der findes, og at de alle sammen er forskellige. Vi ser lidt nærmere på denne pointe i afsnit 5.1.

Bemærkning 15. De orienterbare flader er præcis sfæren og sammenhængende sum af torusser, mens de ikke-orienterbare er præcis summerne af projektive planer.

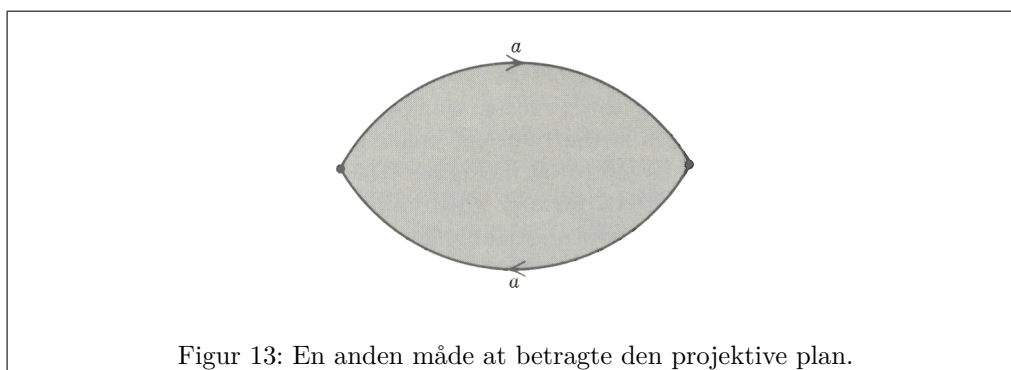
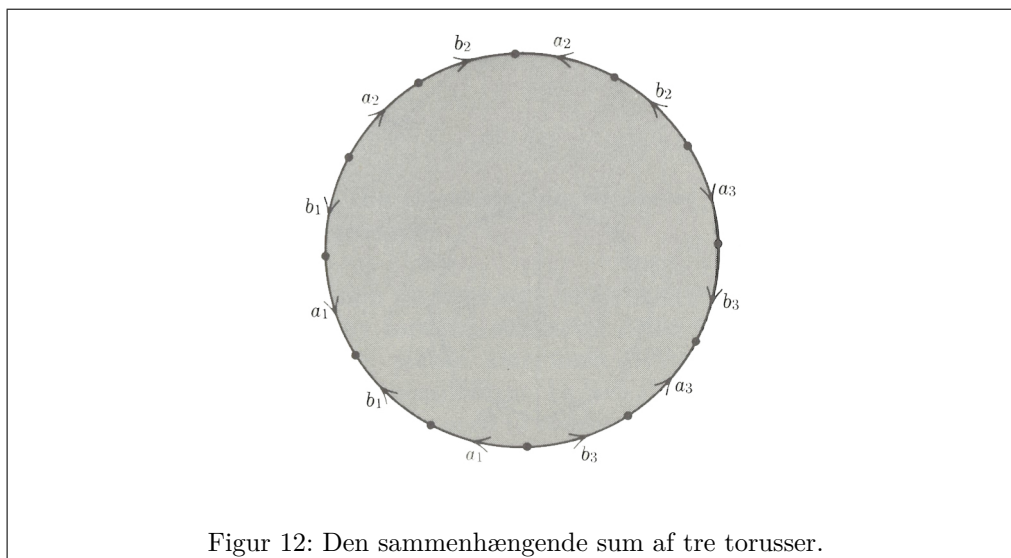
4.1 Sammenhængende sum på en ny måde

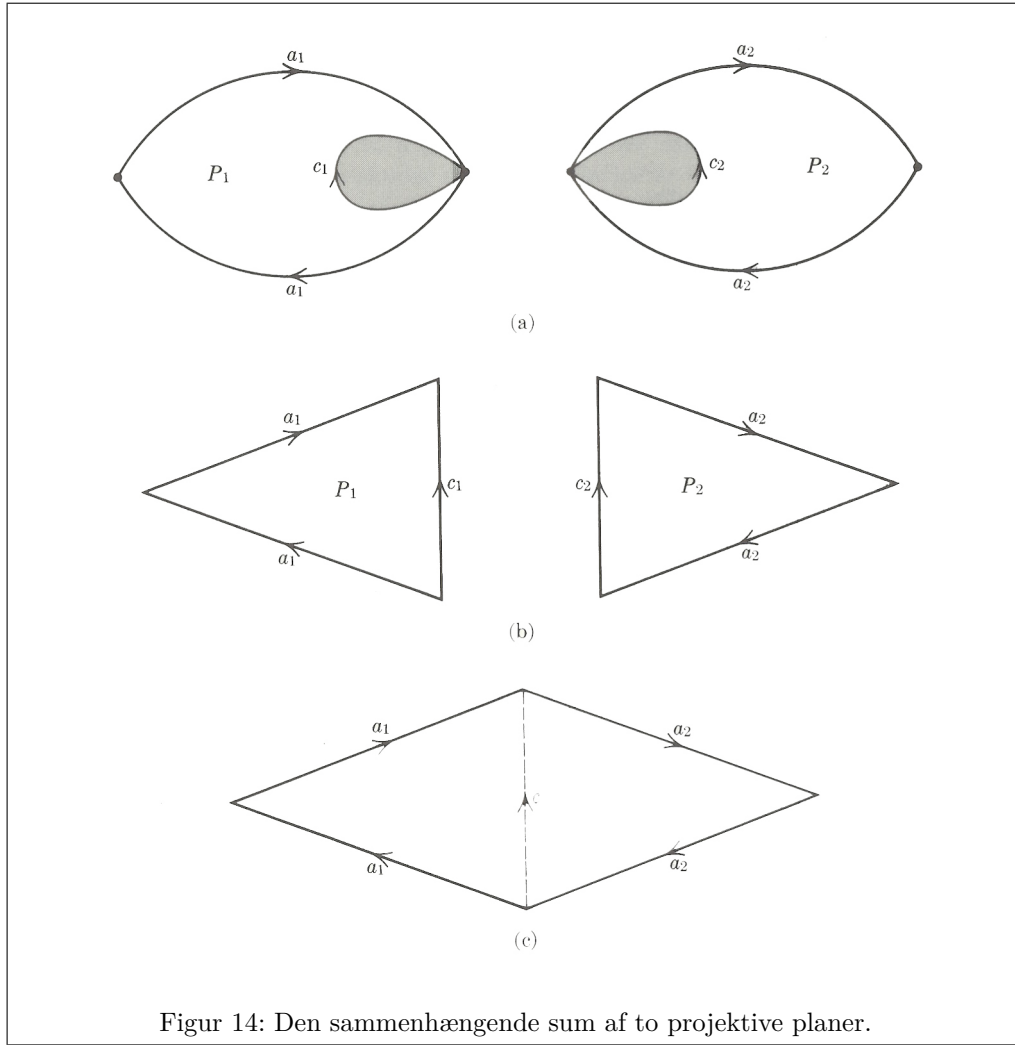


Figur 11: Den sammenhængende sum af to torusser.

Før vi ser på beviset for sætningen, vil det være gavnligt at se nærmere på de flader, den udtaler sig om. Den sammenhængende sum af torusser kan også forstås som på Figur 11, hvor

vi for overskuelighedens skyld undlader at tegne alle de trekanten, der indgår i fladen. Som før er processen som følger: (a) I hver af de to torusser fjerner vi to cirkler og kalder de resulterende kanter c_1 og c_2 . (b) Tegner vi figuren lidt anderledes bliver c_1 og c_2 til rette linjer – bemærk her, at alle hjørnerne på figuren bliver limet til det samme punkt i løbet af processen, så denne tegning vitterligt giver mening. (c) Efter identifikationen opnår vi således en ottekant, hvor de otte kanter skal limes sammen som angivet på figuren. Nu kan vi fortsætte processen og gøre det samme for at opnå den sammenhængende sum af tre torusser. Resultatet bliver tolvkanten vist på Figur 12.





Figur 14: Den sammenhængende sum af to projektive planer.

På samme måde kan vi tænke på den projektive plan som på Figur 13, der viser en tokant, hvor de to kanter limes sammen. Den sammenhængende sum af to projektive planer kan forstås som før for torusserne, og resultatet bliver en firkant, hvor kanterne limes sammen parvist; se Figur 14. Tager vi nu den sammenhængende sum af denne flade med en ny projektiv plan, vil vi så få en sekskant som vist på Figur 15.

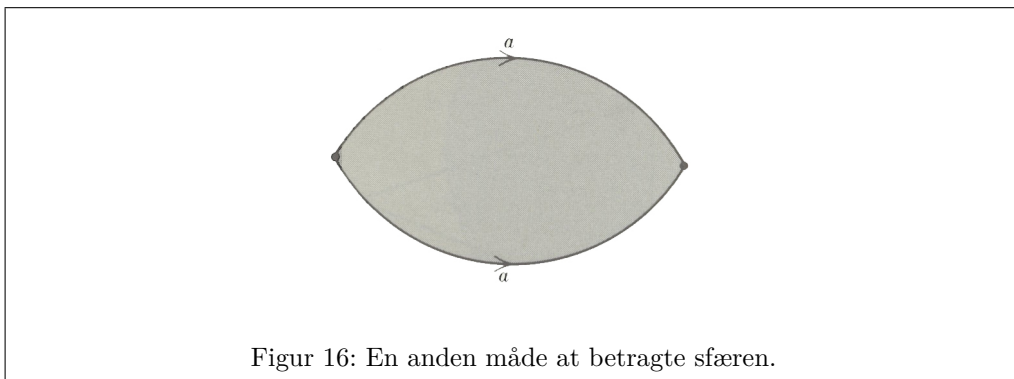
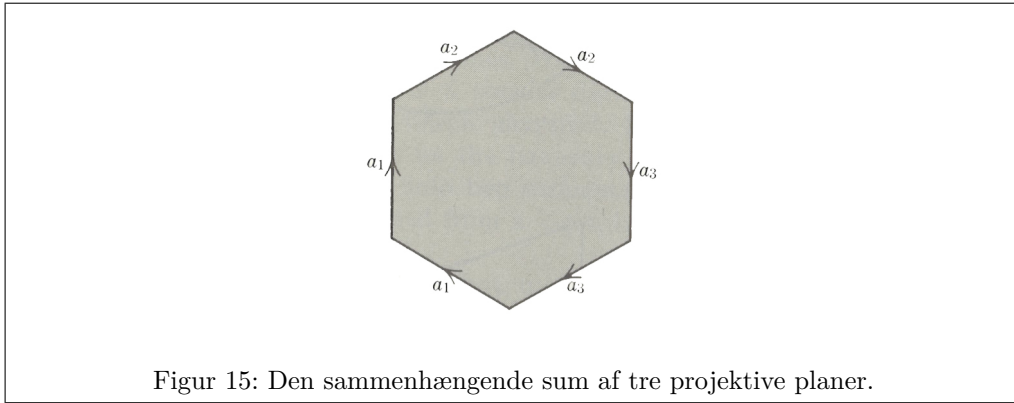
Endelig kan sfæren ses som på Figur 16.

Grunden til, at vi går igennem denne lidt anderledes måde at tænke på de forskellige flader på, er, at vi har en praktisk notation for flader, der opstår ved at man limer kanterne i et polygon sammen (som det netop er tilfældet med de ovenstående eksempler): Vi forestiller os, at vi begynder i et bestemt hjørne i polygonet og løber en tur rundt. Hver gang vi rammer en kant med en pil i omløbsretningen skriver vi det tilsvarende bogstav, og hvis vi møder en kant med pil modsat omløbsretningen, skriver vi det tilsvarende bogstav med negativ eksponent. F.eks. vil figurerne 12, 15, 16 blive benævnt med ordene

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}, \quad a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3, \quad a a^{-1}.$$

Helt generelt udtaler Sætning 13 sig altså om følgende flader:

- Sfæren: aa^{-1}



- Den sammenhængende sum af n torusser:

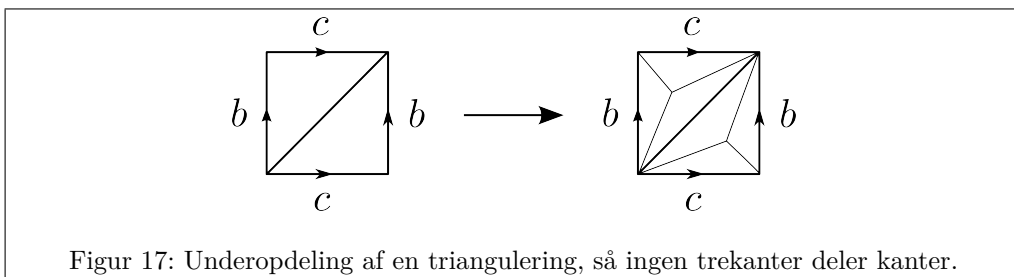
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

- Den sammenhængende sum af n projektive planer:

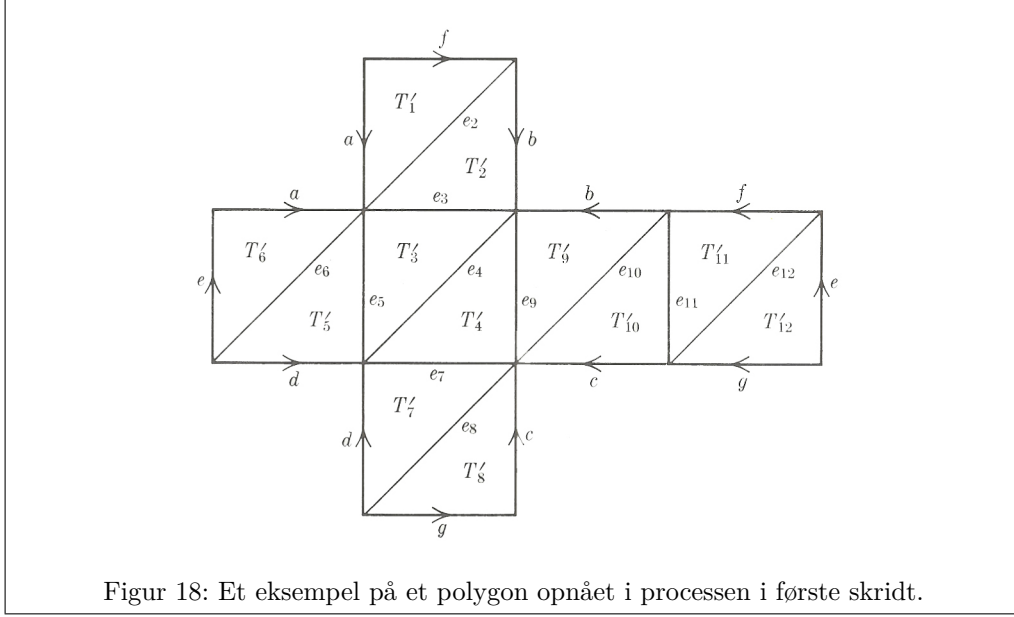
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n.$$

4.2 Beviset for sætningen

Lad S være en flade og lad os bevise, at S er en af de ovenstående flader. Beviset deles for overskuelighedens skyld op i en række dele, der bevises hver for sig.



Første skridt. Oversættelse til polygoner. Det første vi bemærker er, at vi kan antage, at hvert par af trekanter i S højst deler én kant. Hvis dette ikke er tilfældet, inddeler vi bare de trekanter, som deler mere end én kant, i undertrekanter, som vist på Figur 17 i eksemplet med torussen.



Det næste skridt er at indse, at vi kan tegne vores flade som et polygon i planen, hvor kanterne parvist limes sammen, som i vores eksempler ovenfor. Her er en måde at se det på: Kald antallet af trekanter i S for n , og kald trekanterne $T_1, \dots, T_n$ på en sådan måde, at trekant T_i har en kant e_i til fælles med mindst én af trekanterne $T_1, \dots, T_{i-1}$, når $2 \leq i \leq n$. Dette kan lade sig gøre ved at lade en vilkårlig trekant være T_1 , ved derefter at vælge en trekant T_2 , der deler en kant e_2 med T_1 , ved at vælge T_3 , så den deler en kant e_3 med T_1 eller T_2 og så videre. Her er det vigtigt, at vores flade er sammenhængende. Ved at lime sammen langs disse kanter får vi lige præcis det, vi er på jagt efter: En polygon, hvor kanterne limes parvist sammen. Se Figur 18 for et eksempel. Fordelen ved at have dette er, at vi kan bruge notationen fra før og tænke på flader som ord. F.eks. er fladen på Figur 18 givet ved ordet

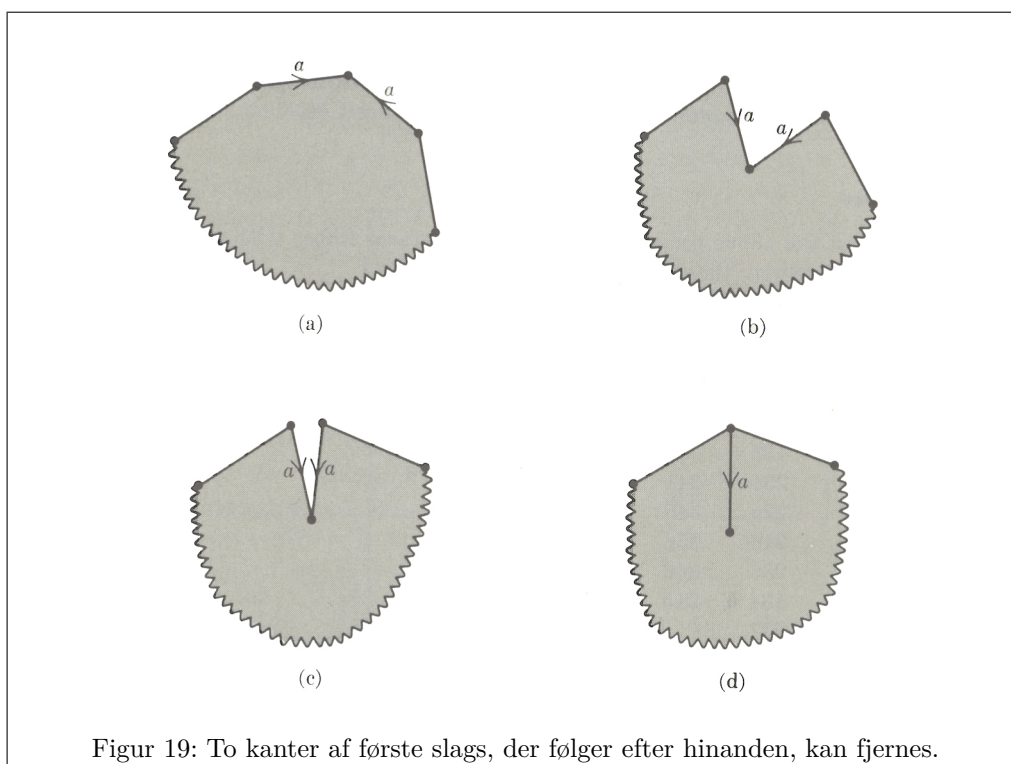
$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e. \quad (1)$$

Vores mål er nu at vise, at vi, ved at klippe og klistre i fladen S på forskellige måder, kan komme frem til en af de tre typer ord, der blev nævnt til sidst i afsnit 4.1.

Andet skridt. Elimination af på hinanden følgende kanter af første slags. Det vil vise sig at være belejligt at dele kanterne op i to slags som følger: Vi siger, at en kant er af *første slags*, hvis både negative og positive eksponenter indgår i ordet, og af *anden slags*, hvis det ikke er tilfældet; dvs. hvis der enten kun er negative eksponenter eller kun positive eksponenter. F.eks. er alle syv par af kanter i eksemplet (1) af første slags. Vi vil vise, at hvis der er mindst fire kanter, så kan vi fjerne kanter af første slags, hvis de følger lige efter hinanden. At det er tilfældet fremgår af Figur 19. Vi kan altså derfor antage, at der aldrig er kanter af første slags, der følger lige efter hinanden. I vores eksempel fra før svarer det til, at vi kan reducere ordet

$$\begin{aligned} aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e &\rightarrow fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e \\ &\rightarrow ff^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e \\ &\rightarrow e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e \rightarrow e^{-1}gg^{-1}dd^{-1}e \\ &\rightarrow e^{-1}dd^{-1}e \rightarrow e^{-1}e. \end{aligned}$$

Bemærk, at hvis polygonet efter denne simplificering består af kun 2 kanter (som i eksemplet), vil det tilsvarende ord blive på formen aa^{-1} eller aa . Disse svarer netop til sfæren henholdsvis



Figur 19: To kanter af første slags, der følger efter hinanden, kan fjernes.

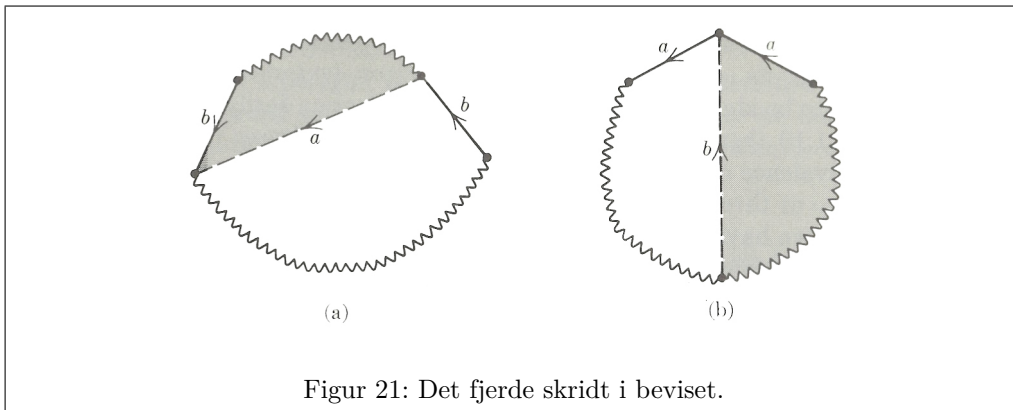
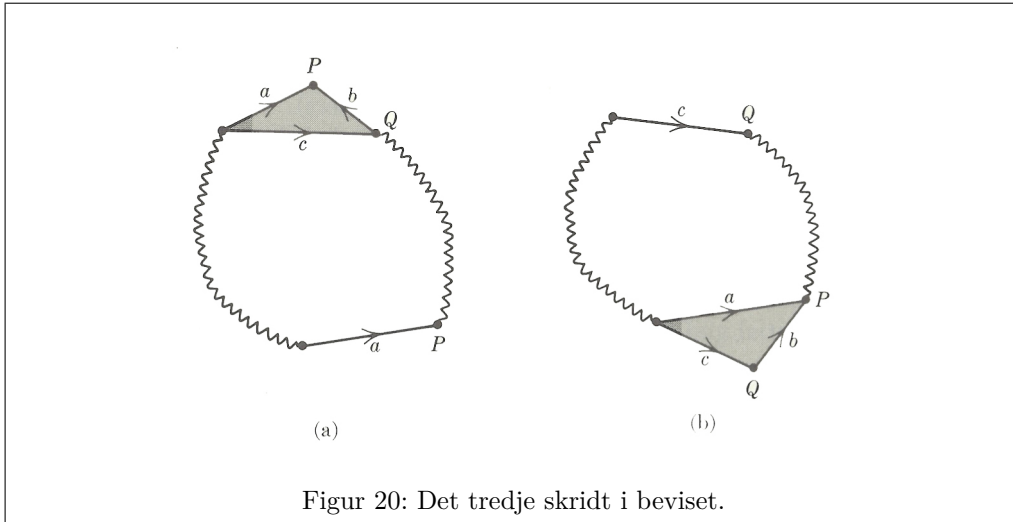
den projektive plan, så hvis dette er tilfældet, er vi færdige med beviset, da disse to flader netop er blandt dem, vi er på jagt efter. Hvis det ikke er tilfældet, fortsætter vi beviset som følger.

Tredje skridt. Alle hjørner limes til det samme punkt. Selvom kanterne bliver limet sammen i par, kan der ske alt muligt med hjørnerne. Vi så for eksempel i tilfældet med torussen, at alle hjørnerne til sidst limes til det samme punkt, og vi vil nu se, at vi altid kan gå ud fra, at det er tilfældet ved eventuelt at ændre lidt på vores flade S . Antag derfor at hjørnerne er samlet i mere end én gruppe. Så vil der et sted være to på hinanden følgende hjørner, som tilhører forskellige grupper. Kald disse hjørner P og Q og betragt Figur 20. Da P og Q tilhører forskellige grupper, vil kanterne a og b ikke blive identificeret, hvilket vil sige, at a identificeres med en kant et andet sted i polygonet (i bunden på figuren). Skær polygonet op langs kanten c og lim de to a -kanter sammen for at opnå den højre del af figuren. Resultatet er, at der nu er et hjørne mindre i P 's gruppe (mod at vi har fået et hjørne mere i Q 's gruppe); dette fremgår eksplicit af figuren, da vi har ændret to P 'er og et Q til et P og to Q 'er. Således kan vi nu fortsætte, indtil vi har elimineret alle hjørner i P 's gruppe og til sidst elimineret alle på nær en enkelt gruppe, hvilket netop betyder, at alle hjørner limes til det samme punkt.

Fjerde skridt. Hvordan kanter af anden slags samles ved siden af hinanden. Vi vil nu forsøge at samle kanterne af første hhv. anden slags for at få vores ord på formen i slutningen af afsnit 4.1. Vi starter med ordene af anden slags: Antag at der er et par af kanter af anden slags, der ikke følger lige på hinanden i vores polygon, og lad dem være betegnet med bogstavet b . Ved at skære fladen op langs kanten a vist på Figur 21 og derefter lime langs b , vil de resulterende to kanter benævnt a , som nu er af anden slags, følge lige på hinanden, som det fremgår af figuren. Resultatet er, at vi har reduceret antallet af kanter af anden slags, der ikke følger lige på hinanden, med én. Således kan vi fortsætte til alle af anden slags følger lige efter hinanden.

Hvis der på nuværende tidspunkt ikke er nogen kanter af første slags, vil vores ord være på formen $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$ for et eller andet tal n , og så er vi færdige med beviset, for dette er netop den sammenhængende sum af n projektive planer. Hvis dette ikke er tilfældet, fortsætter vi som følger.

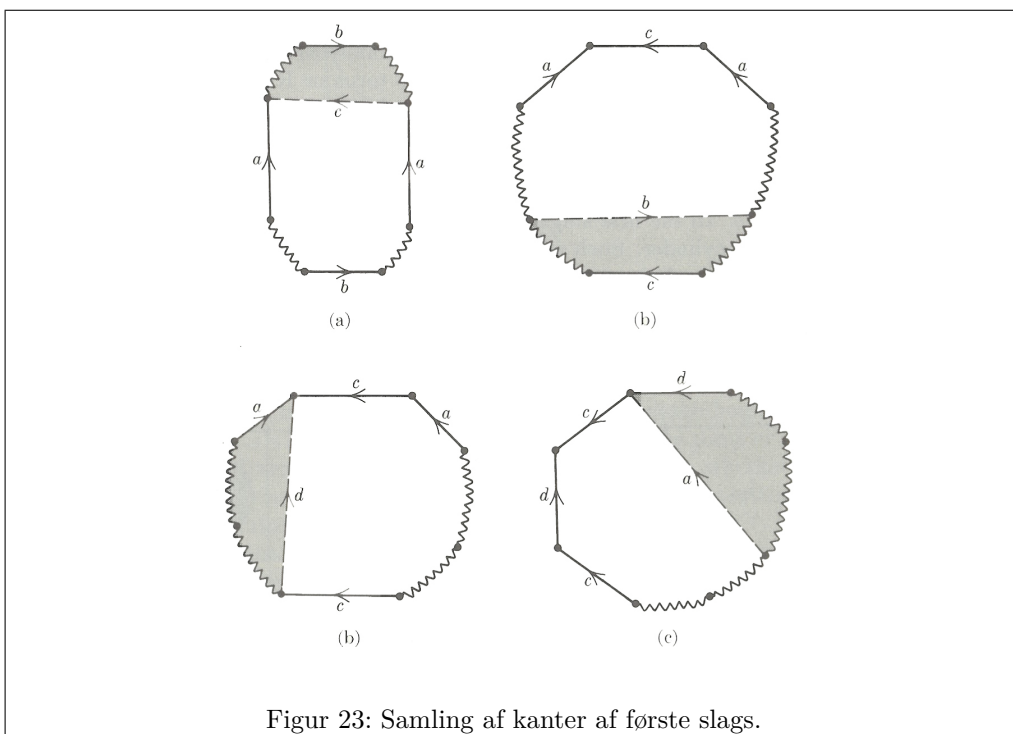
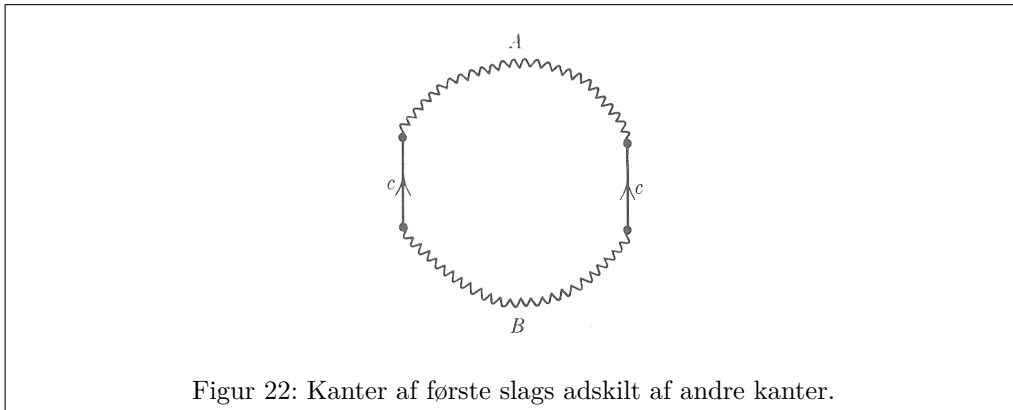
Femte skridt. Kanter af første slags. Antag altså nu, at der er mindst én kant af første



slags. Vores næste mål er at samle alle kanter af første slags på den måde, de er samlet i ordene for den sammenhængende sum af torusser. Fra vores antagelse er der mindst én kant af første slags, så kald denne c , og et sted i ordet optræder altså et c^{-1} pr. definition af “første slags”. Vi påstår, at der findes en anden kant af første slags, benævnt d , som adskiller c fra c^{-1} . Det vil altså sige, at vores polygons ord er på formen

$$\dots c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots, \quad (2)$$

hvor punktummerne indikerer, at der kan ske hvad som helst mellem bogstaverne. Lad os se at dette er tilfældet: Hvis der gjaldt, at c og c^{-1} ikke bliver adskilt af kanter af første slags, vil vores polygon se ud som på Figur 22, hvor A og B indikerer en eller anden følge af kanter. Alle kanterne i A bliver limet sammen med kanter i A og tilsvarende bliver alle kanter i B limet sammen med kanter i B , så A og B blandes så at sige ikke. Det må betyde at de to startpunkter for c efter sammenlimning ikke bliver identificeret med slutpunkterne for c , men i det tredje skridt af beviset sørgede vi for, at alle hjørner i polygonet blev limet til det samme; hvis dette skal være rigtigt, må det altså være fordi, at c og c^{-1} bliver adskilt af en kant af første slags, hvilket var vores påstand.



Antag altså nu, at vi har fire kanter af første slags, der adskiller hinanden som i (2). Vi vil gerne se, at vi ved at skære og lime kan sætte vores polygon op på en sådan måde, at kanterne af første slags følger lige efter hinanden, som vi før gjorde det med kanter af anden slags. Hver gang, vi har kanter af første slags a, b, a^{-1}, b^{-1} , der ikke følger efter hinanden, kan vi udføre processen vist på Figur 23. Her indfører vi i første skridt en kant c og limer de to b -kanter sammen. Herefter indfører vi en kant d og limer de to a -kanter sammen. Som det fremgår af figuren, vil vi til sidst have kanter af første slags, der følger lige efter hinanden, her på formen $cdc^{-1}d^{-1}$. Således kan vi fortsætte til alle kanter af første slags er samlet i grupper af fire.

Hvis der på nuværende tidspunkt ikke er nogen kanter af anden slags, er vi færdige, da vores ord er kommet på formen

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

hvilket lige præcis er den sammenhængende sum af torusser. Hvis det ikke er tilfældet, fortsætter vi som følger.

Sidste skridt. Konklusion. Tilbage er altså kun tilfældet hvor der er $m > 0$ par af kanter af anden slags og $n > 0$ grupper af fire kanter af første slags. Fladen der resulterer af sammenlimning er den sammenhængende sum af m projektive planer og n torusser. Men vi ved nu fra Øvelse 12, at den sammenhængende sum af en projektiv plan og en torus er det samme som den sammenhængende sum af 3 projektive planer. Heraf følger, at den sammenhængende sum af m projektive planer og n torusser er det samme som den sammenhængende sum af $m + 2n$ projektive planer. Specielt er det altså en sammenhængende sum af projektive planer og dermed en af de flader, som sætningen udtaler sig om. Det afslutter beviset, da vi har set, at vi, uanset hvilken flade vi tager fra start, kan skære i den og lime den sammen, indtil den til sidst er en sfære, en sammenhængende sum af projektive planer, eller en sammenhængende sum af torusser.

5 Perspektiver

Som en kort afslutning på vores diskussion af flader, betragter vi et par spørgsmål, som vi ikke har beskæftiget os med i det tidligere.

5.1 Invarianter af flader

Som vi tidligere har været inde på, giver Sætning 13 samtlige mulige flader, men det er ikke klart, om de flader, sætningen omhandler, rent faktisk er forskellige. Husk at to flader betragtes som værende forskellige, hvis det er umuligt at deformere den ene til den anden. Vi er derfor interesseret i egenskaber ved flader, der ikke ændrer sig under kontinuert deformation. En sådan egenskab kaldes en *invariant*.

Eksempel 16. Det følgende eksempel kan defineres mere præcist og matematisk men for nuværende nøjes vi med at beskrive idéen: En flade kaldes *enkeltsammenhængende*, hvis enhver kurve på fladen kan trækkes sammen til et punkt. Dette er for eksempel tilfældet på sfæren (rent intuitivt sker her blot det, at enhver snor, der placeres rundt om en kugle kan trækkes sammen til et enkelt punkt), men man kan hurtigt overbevise sig om, at det ikke er tilfældet på torussen. Samtidig er det at være enkelsammenhængende en egenskab, der ikke ændrer sig ved at vi deformerer fladen, og vi kan således konkludere at sfæren og torussen vitterligt er to forskellige flader. Af fladerne i Sætning 13 (og dermed af alle fladerne) er sfæren faktisk den eneste enkelsammenhængende, og den kan dermed skelnes fra alle de andre.

Eksempel 17. Det andet eksempel lægger sig lidt nærmere op af vores diskussion af triangulerede flader. Lad S være en trianguleret flade, lad V være antallet af hjørner i S , lad E være antallet af kanter i S , og lad F være antallet af flader i S , alle talt efter sammenlimning. Definer *Eulerkarakteristikken af S* til at være tallet

$$\chi(S) = V - E + F.$$

Det viser sig (hvilket ikke er helt oplagt), at Eulerkarakteristikken også er en invariant og derfor kan bruges til at skelne flader fra hinanden. For eksempel har sfæren Eulerkarakteristik 2 (da $V = 3, E = 3, F = 2$), mens torussen har Eulerkarakteristik 0 (da $V = 1, E = 3, F = 2$), som det ses bare ved at betragte trianguleringerne fra tidligere. Igen ser vi, at sfæren og torussen altså er to forskellige flader. Mere generelt gælder for den sammenhængende sum $T \# T \# \dots \# T$ af g torusser, at

$$\chi(T \# \dots \# T) = 2 - 2g,$$

så alle disse sammenhængende summer er altså forskellige. Dette er indholdet af Opgave 9. Tallet g er altså en invariant af orienterede flader og kaldes også fladens *genus*. Man kan også definere genus til at være det mindste antal kurver i fladen, man kan klippe langs, uden at klippe den over i 2 (i torussen kan man finde $g = 1$ kurve, men i sfæren er der $g = 0$ muligheder). Eulerkarakteristikken kan dog ikke skelne alle flader fra hinanden: Kleinflasken har også Eulerkarakteristik 0 (overvej!), så Eulerkarakteristikken kan således ikke skelne Kleinflasken fra torussen.

Slutteligt kan vi dog bemærke, at det, om en flade er orienterbar eller ej, er en invariant af flader; en orienterbar flade og en ikke-orienterbar flade vil altid være forskellige. Ved at kombinere informationen fra orienterbarheden og Eulerkarakteristikken får vi en invariant, der kan skelne alle fladerne fra Sætning 13 fra hinanden, og vi kan således sige, at vi har løst klassifikationsproblemet for flader fuldstændigt. Vi formulerer dette resultat som en sætning.

Sætning 18. *Eulerkarakteristik og orienterbarhed skelner alle fladerne fra Sætning 13 fra hinanden.*

5.2 Klassifikation i andre dimensioner

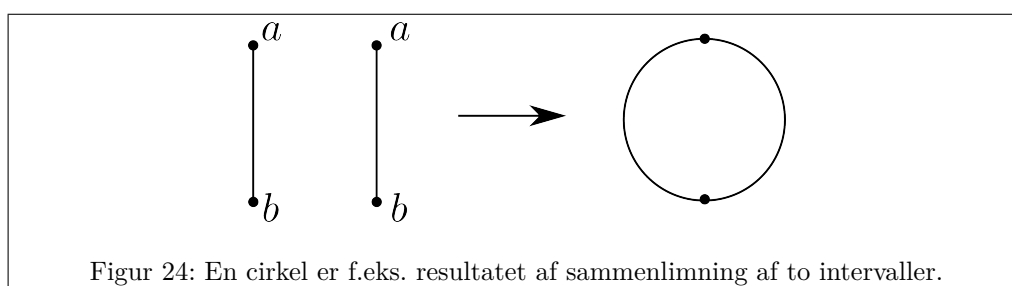
Sætning 13 fortæller os, hvordan alle lukkede 2-dimensionale objekter ser ud. Man kunne nu spørge sig selv, hvad der sker i andre dimensioner.

Lad os først kigge på dimension 1. Helt analogt til de triangulerede flader, kan vi definere det følgende.

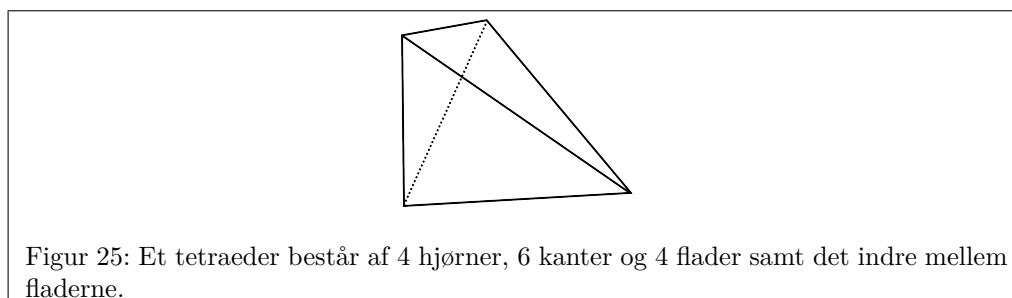
Definition 19. En *trianguleret 1-mangfoldighed* består af en endelig mængde af lukkede intervaller $I_1, \dots, I_n$ samt data om, hvordan disse limes sammen (se f.eks. Figur 24). Kravet er nu, at hvert interval, efter sammenlimning, kun mødes i endepunkterne, og at hvert endepunkt højst indgår i 2 intervaller. Som før kræver vi, at resultatet af sammenlimningen er sammenhængende. En 1-mangfoldighed kaldes *lukket*, hvis hvert endepunkt har en partner.

Som man måske kan forestille sig, viser det sig, at klassifikationsspørgsmålet er endnu lettere i dimension 1 end i dimension 2, som den følgende sætning fortæller os.

Sætning 20. *Enhver lukket 1-mangfoldighed er en cirkel (se Figur 24).*

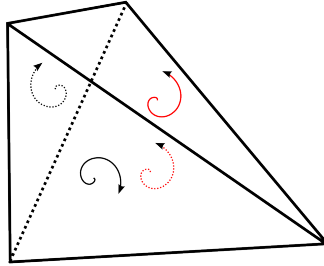


Tallet 1 i definitionen på 1-mangfoldighed skyldes selvfølgelig, at objekterne alle er 1-dimensionale. Af denne grund kaldes flader undertiden også *2-mangfoldigheder*. I dimension 3 er den naturlige definition den følgende.



Definition 21. En *trianguleret 3-mangfoldighed* består af en endelig mængde af tetraedre $T_1, \dots, T_n$ (se Figur 25) samt information om hvordan disse limes sammen. Kravet er denne gang, at hvis to tetraedre efter sammenlimningen har punkter til fælles, har de enten et enkelt punkt til fælles, en enkelt kant til fælles, eller en hel eller flere flader til fælles. En flade kan deles af højst to tetraedre, og 3-mangfoldigheden kaldes *lukket*, hvis hver flade har en partner.

Det er klart, at 3-mangfoldigheder er noget sværere at forestille sig end deres 1- og 2-dimensionale kolleger. Ligesom den simpleste (og eneste) lukkede 1-mangfoldighed var cirklen, den simpleste lukkede 2-mangfoldighed var sfæren, er den simpleste lukkede 3-mangfoldighed enhedssfæren i det 4-dimensionale rum $\mathbb{R}^4$; den består af alle fire-dimensionale vektorer af længde 1. Det er et (ikke specielt oplagt) faktum, at denne kan beskrives ved sammenligningen af fladerne i et tetraeder som vist på Figur 26.



Figur 26: Den 3-dimensionale enhedssfære i $\mathbb{R}^4$ som en sammenligning af kanterne i et tetraeder med sig selv. Her skal man forestille sig, at der på hver flade er en pil, og at fladerne med pile af samme farve limes sammen. De stiplede pile er de, der ligger på flader på bagsiden af tetraederet.

Det viser sig, at klassifikationsspørgsmålet er uhyre svært i dimension 3. Det har til dels en løsning, der kendes som geometriseringssætningen, og som blev vist af Perelman i 2003. Vi har på nuværende tidspunkt et hav af invarianter til rådighed til at beskrive 3-mangfoldigheder, og disse studeres af et stort tal matematikere verden rundt; ikke mindst i Århus, hvor vi blandt andet bruger metoder og idéer fra det, der i fysikken kaldes kvantefeltteorier, til at beskrive 3-mangfoldigheder.

Den interesserede læser kan tage et kig på <http://en.wikipedia.org/wiki/Manifold> for mere information om mangfoldigheder.

6 Opgaver

Opgave 1. Løs følgende:

- Find en saks og noget papir.
- Betragt fladen på Figur 18. Konstruer fladen af papir og overbevis dig om, at resultatet bliver en sfære (hvor man her som altid må deformere fladen kontinuert efter behov).

Opgave 2. Overbevis dig om, at Kleinflasken er ikke-orienterbar.

Opgave 3. Betragt ordene

$$\begin{aligned} & abcd d^{-1} c^{-1} a^{-1} b^{-1}, \quad aab c d e e^{-1} d^{-1} c^{-1} b^{-1}, \\ & abcd^{-1} d c^{-1} b^{-1} a^{-1}, \quad a c c^{-1} b d a^{-1} d b^{-1}. \end{aligned}$$

I stil med beviset for Sætning 13, tegn de fire polygoner der svarer til disse ord. Hvad bliver de resulterende flader? Forklar dette ved at bruge de seks skridt fra beviset for sætningen.

Opgave 4. Vis at sfæren S^2 , torussen T og den projektive plan P har Eulerkarakteristikker $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T) = 0$, og $\chi(P) = 1$. Udregn Eulerkarakteristikken af den fjerde flade fra Opgave 3.

Opgave 5. Hvis man vil lave en fodbold af n femkanter, således at hvert hjørne deles af 3 femkanter, hvor mange skal man så bruge? Vis at resultatet bliver nødt til at være $n = 12$. Hint: Tænk på en fodbold som sfæren S^2 og find en formel for Eulerkarakteristikken af samlingen af femkanter.

Hvis man vil lave en fodbold af n femkanter og m sekskanter (som en rigtig fodbold), så hvert hjørne deles af 3 fem- eller sekskanter (eller en blanding af de to; bare der er seks i alt), kan man igen stille spørgsmålet om, hvad n og m kan være. Vis at n igen bliver nødt til at være 12, mens m kan være hvad som helst.

Opgave 6. Lad S_1 og S_2 være flader. Vis at

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Brug resultatet fra Opgave 6 til at forklare Opgave 7, 8 og 9 nedenfor – her kan man bruge Sætning 18.

Opgave 7. Lad S være en trianguleret flade, og lad S^2 betegne sfæren. Vis at $S \# S^2 = S$.

Opgave 8. Lad P være den projektive plan. Vis at $P \# P$ er Kleinflasken.

Opgave 9. Brug eventuelt den forrige opgave til at løse følgende:

- Vis at den sammenhængende sum af g torusser har Eulerkarakteristik

$$\chi(T \# \cdots \# T) = 2 - 2g.$$

- Vis at den sammenhængende sum af n projektive planer har Eulerkarakteristik

$$\chi(P \# \cdots \# P) = 2 - n.$$

- Lad S_1 og S_2 være orienterbare flader af genus g_1 og g_2 . Vis at $S_1 \# S_2$ har genus $g_1 + g_2$.

Opgave 10. Løs Øvelse 12.