Noter til Lineær algebra-TØ uge 19

13. maj 2010

Opgaven på ugesedlen. *Lad* $A, H, S \in Mat_n(\mathbb{C})$ *være matricer med* H *hermitesk,* S *skævhermitesk og* $A = H + S$.

(1) Vis at $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$*, og at* $S = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

(2) Vis at A *er normal, hvis og kun hvis* $HS = SH$.

(3) Antag at der findes en unitær matrix U*, så* U^*AU *er diagonal. Vis at* U^*HU *og* U^*SU *også er diagonalmatricer.*

Løsning. Første del af opgaven har MA2 allerede set.

(1) Ved at udnytte, at $H^* = H$ og $S^* = -S$ fås

$$\frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(H + S + H^* + S^*) = \frac{1}{2}(H + H + S - S) = H,$$

og

$$\frac{1}{2}(A - A^*) = \frac{1}{2}(H + S - H^* - S^*) = \frac{1}{2}(H - H + S + S) = S.$$

(2) Da $A^*A = H^*H + H^*S + S^*H + S^*S$, og $AA^* = HH^* + SH^* + HS^* + SS^*$, følger det, at $A^*A = AA^*$, hvis og kun hvis

$$HH + HS - SH - SS = HH + SH - HS - SS,$$

hvilket omvendt kan ses at være ækvivalent med $2SH = 2HS$ og dermed $SH = HS$.

(3) Bemærk først at A og A^* diagonaliseres af samme unitære matrix; hvis $A = UDU^*$, får vi

$$A^* = (UDU^*)^* = (U^*)^*D^*U^* = UD^*U^*.$$

Ved nu at bruge første del af opgaven, får vi

$$H = \frac{1}{2}(UDU^* + UD^*U^*) = \frac{1}{2}U(D + D^*)U^*,$$

hvilket betyder, at $U^*HU = \frac{1}{2}(D + D^*)$, som er en diagonalmatrix. På helt samme måde kan det udledes, at $U^*SU = \frac{1}{2}(D - D^*)$, som også er diagonal.

■

Bemærkning. Betingelsen at U^*AU er diagonal er ækvivalent med, at A er normal; de normale matricer er præcis dem for hvilken den komplekse udgave af spektralsætningen gælder. Med andre ord: De normale matricer er præcis dem, der kan diagonaliseres unitært. En anden bemærkning, der har mindre med nærværende kursus at gøre er, følgende: Hvis egenværdierne for matricen A kaldes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gælder $\mathrm{Re}(\lambda_i) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \overline{\lambda_i})$ og $i\mathrm{Im}(\lambda_i) = \frac{1}{2}(\lambda_i - \overline{\lambda_i})$. Da vi ved, at $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, får vi, at

$$\begin{aligned} U^*HU = \frac{1}{2}(D + D^*) &= \frac{1}{2}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})) \\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{Re}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Re}(\lambda_n)), \end{aligned}$$

og tilsvarende gælder, at

$$U^*SU = i\mathrm{diag}(\mathrm{Im}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Im}(\lambda_n)).$$

Man kan derfor fristes til at tænke på H som realdelen af den normale matrix A og på S som i gange imaginærdelen; to begreber vi selvfølgelig ikke har defineret – dette undersøges lidt nærmere i ølopgave 6, der også omfatter den (mere anvendelige) polardekomposition af matricer.