Noter til Lineær algebra-TØ uge 17

28. april 2010

[L] Opgave 6.3.18. *Lad A være en diagonaliserbar matrix med karakteristisk polynomium $p(\lambda) = a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$. Det vil sige, at $A = XDX^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix, hvis indgange er egenværdier i A, og X er en invertibel matrix, hvis søjler er egenvektorerne for A. Vis at $p(D) = 0$, og at $p(A) = 0$. Vis at $a_{n+1} \neq 0$ medfører, at A er invertibel med invers $A^{-1} = q(A)$ for et polynomium q af grad mindre end n.*

Bemærkning. Her indsætter vi en matrix i et polynomium ved at erstatte potenserne af λ med potenser af matricen, og vi erstatter konstantleddet a_{n+1} med $a_{n+1}I$, så vi alt i alt får en matrix ud. Opgaven her et specialtilfælde af Cayley-Hamilton-sætningen, der siger, at enhver matrix er rod i sit eget karakteristiske polynomium; undervejs i beviset udnyttes det, at diagonalmatricer i stort omfang er nemmere at arbejde med end generelle matricer.

Løsning. Lad egenværdierne for A være $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pr. definition af det karakteristiske polynomium gælder så $p(\lambda_i) = 0$ for alle i. Indsættelse giver, at

$$\begin{aligned}
p(D) &= a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^n + \cdots + a_{n+1}I \\
&= a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix} + \cdots + a_{n+1}I \\
&= \begin{pmatrix} a_1\lambda_1^n + \cdots + a_{n+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_1\lambda_n^n + \cdots a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

hvor der i alle ovenstående matricer er 0'er uden for diagonalen. Bemærk at nøglen i ovenstående udregningen er, at det er let at finde potenser af diagonalmatricer; man tager blot den ønskede potens af alle indgangene. Lad os udnytte ovenstående til at vise, at $p(A) = 0$. Udregning giver, at

$$\begin{aligned}
p(A) &= a_1A^n + \cdots + a_{n+1}I = a_1(XDX^{-1})^n + \cdots + a_{n+1}(XX^{-1}) \\
&= X^n(a_1D^n + \cdots + a_{n+1}I)(X^{-1})^n = X^n 0 (X^{-1})^n = 0.
\end{aligned}$$

Lad os til sidst antage, at $a_{n+1} \neq 0$ og lad os analysere problemet en smule. Vi vil finde et q så $q(A)A = I$. Idet $p(A) = 0$, kan vi skrive

$$I = -\tfrac{1}{a_{n+1}}(a_1A^n + \cdots + a_nA).$$

Tager vi her et A uden for parentesen får vi en kandidat q: Sæt nemlig $q(\lambda) = -\frac{1}{a_{n+1}}(a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)$. Da får vi

$$q(A)A = -\tfrac{1}{a_{n+1}}(a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI)A = -\tfrac{1}{a_{n+1}}(a_1A^n + \cdots + a_nA) = I$$

som ønsket. ∎

Opgave B på ugesedlen. *Lad $A \in Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ og antag, at A har en ikke-reel egenværdi. Gør rede for at A, betragtet som kompleks matrix, er diagonaliserbar.*

Løsning. Ifølge sætning 9.2.6 i noterne er det nok at vise, at A har tre forskellige egenværdier. Vi er givet, at $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ er en egenværdi, og vi ved, at $\bar{\lambda}$ dermed også er det. Disse to er forskellige, da λ ikke er reel. Påstanden er nu, at den sidste egenværdi, λ_3, nødvendigvis må være reel og dermed forskellig fra de to andre egenværdier. Det karakteristiske polynomium for A er

$$p(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})(x - \lambda_3).$$

Ganger vi ud, ser vi, at konstantleddet kommer til at hedde $-\lambda\bar{\lambda}\lambda_3 = -|\lambda|^2\lambda_3$, men da A pr. antagelse var en reel matrix, er alle koefficienterne i polynomiet reelle (da koefficienterne pr. definition er forskellige summer og produkter af indgangene i A), men hvis $-|\lambda|^2\lambda_3$ er reel, må λ_3 være reel, hvilket viser påstanden. Det er da heller ikke overraskende, at dette er sandt; det er velkendt fra analyse, at ethvert reelt tredjegradspolynomium har mindst én reel rod. ■