GEOMETRI-TØ, UGE 2

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$. Lad $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ være

$$x(t) = \begin{cases} t^2, & \text{hvis } t \geq 0, \\ -t^2, & \text{hvis } t \leq 0, \end{cases}, \quad y(t) = t^2.$$

Vis at dette er en parametrisering af C. Er γ glat? Er den regulær?

Løsning. Vi må nok hellere antage, at t gennemløber $\mathbb{R}$. Vi skal så vise, at billedet af kurven er $\mathrm{Im}\gamma = C$. Lad $(x,y) = \gamma(t) \in \mathrm{Im}\gamma$. Dvs. at $y = t^2$, og at x er enten t^2 eller $-t^2$, alt afhængigt af, om t er positiv eller negativ. Hvis t er positiv er $y = t^2 = |x|$, og hvis t er negativ, er $y = t^2 = -x = |x|$, så under alle omstændigheder er $y = |x|$. Antag omvendt at $(x,y) \in C$ og lad os finde $t \in \mathbb{R}$, så $\gamma(t) = (x,y)$. Hvis $x \geq 0$, vælger vi $t = \sqrt{x}$. Da er

$$\gamma(t) = (t^2, t^2) = (x, x) = (x, |x|) = (x, y).$$

Hvis x er negativ, sætter vi $t = -\sqrt{|x|}$. Da bliver

$$\gamma(t) = (-t^2, t^2) = (-|x|, |x|) = (x, y).$$

Kurven γ er ikke glat, da x-koordinaten af dens afledede

$$x'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{hvis } t \geq 0, \\ -2t, & \text{hvis } t \leq 0, \end{cases}$$

ikke er differentiabel. Den afledede af y-koordinaten er

$$y'(t) = 2t,$$

så $\|\gamma'(0)\| = 0$, og kurven er altså heller ikke regulær. ∎

Opvarmningsopgave 2. Beregn buelængden af $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Løsning. Lad $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Buelængden af γ er da

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)|\, du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u}\, du = \int_{t_0}^{t} du = [u]_{t_0}^{t} = t - t_0.$$

∎

Opvarmningsopgave 3. Vis at

$$(a \times b) \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} a \cdot v & b \cdot v \\ a \cdot w & b \cdot w \end{pmatrix}$$

i specialtilfældet $a = e_1$, $b = e_2$.

Løsning. Sæt $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_i e_i$. Vi ved, at $e_1 \times e_2 = e_3$. Venstresiden bliver altså tredjekoordinaten i $v \times w$, som pr. definition er $v_1 w_2 - v_2 w_1$. Højresiden er ligeledes

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

∎

Opvarmningsopgave 4. Giv en basisuafhængig definition af et krydsprodukt på et vilkårligt 3-dimensionalt vektorrum udstyret med et indre produkt.

Løsning. Jeg påstår, at dette er umuligt. Normalt kan man tænke på krydsproduktet $v \times w$ af to vektorer v og w som en vektor, der står vinkelret på både v og w (hvilket giver mening at kræve i et rum med indre produkt), hvis længde afhænger af længderne af v og w samt deres indbyrdes vinkel (hvilket man også kan tale om, så længe man har et indre produkt), og som peger i en bestemt af to retninger (hvilket kun giver mening, når man har valgt, hvad der er op og ned i rummet, eller med andre, om man bruger højre eller venstre hånd i sin huskeregel for krydsproduktet – man har foretaget et såkaldt valg af orientering). På bundlinjen betyder det, at vi står med to potentielle definitioner af $v \times w$ på et vilkårligt rum, hvor det er umuligt at kalde den ene bedre end den anden uden ekstra information (orienteringen).

Mere præcist er orienteringer givet som følger: To ordnede baser $\{e_i\}$ og $\{f_i\}$ for (et generelt vektorrum) V siges at have *samme orientering*, hvis matricen for basisskiftet mellem de to baser har positiv determinant. Regnereglerne for determinanter viser, at det at have samme orientering definerer en ækvivalensrelation på mængden af baser for V, og da determinanten kun kan være enten positiv eller negativ, må relationen have to ækvivalensklasser, kaldet *orienteringer*. Givet en orientering på et 3-dimensionalt indre produkt-rum, kan vi nu for $v, w \in V$ definere $v \times w \in V$ som følger: Hvis v og w er lineært afhængige, sætter vi $v \times w = 0$, og ellers lader vi $v \times w \in V$ være den entydigt bestemte(!) vektor i V, der står vinkelret på både v og w, har længde

$$\|v \times w\| = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle}$$

og opfylder, at $(v, w, v \times w)$ er i den valgte orientering. ∎

[P], Opgave 1.1.6 (ii). Betragt ellipsen $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ og fokuspunkterne $f_1 = (\varepsilon p, 0)$, $f_2 = (-\varepsilon p, 0)$, hvor $\varepsilon = \sqrt{1 - q^2/p^2}$. Vis at produktet af afstandene fra f_1 og f_2 til tangentlinjen i et vilkårligt punkt p på ellipsen ikke afhænger af punktet p.

Bevis. Lad $\gamma(t) = (p\cos t, q\sin t)$ være et punkt på ellipsen. Tangentlinjen går gennem $\gamma(t)$ og har hældning

$$\gamma'(t) = (-p\sin t, q\cos t).$$

Afstanden fra f_1 og f_2 til tangentlinjen er (tegning)

$$(\gamma(t) - (\pm\varepsilon p, 0)) \cdot \frac{n}{\|n\|},$$

hvor n er en normalvektor til tangentlinjen, altså en vektor, der opfylder at $n \cdot \gamma'(t) = 0$. Man finder let, at en sådan er givet ved $(q\cos t, p\sin t)$. Da bliver ovenstående

$$\begin{aligned}\frac{(p\cos t \mp \varepsilon p)\cdot q\cos(t) + (q\sin t)\cdot p\sin t}{\sqrt{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)}} &= \frac{pq \mp \varepsilon pq\cos t}{\sqrt{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)}} \\ &= \frac{pq(1 \mp \varepsilon\cos t)}{\sqrt{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)}}.\end{aligned}$$

Produktet af de to afstande bliver da

$$\begin{aligned}\frac{pq(1 - \varepsilon\cos t)}{\sqrt{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)}} \cdot \frac{pq(1 + \varepsilon\cos t)}{\sqrt{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)}} &= \frac{p^2q^2(1 - \varepsilon^2\cos^2(t))}{q^2\cos^2(t) + p^2\sin^2(t)} \\ &= \frac{q^2(p^2 - (p^2 - q^2)\cos^2(t))}{q^2\cos^2(t) + p^2(1 - \cos^2(t))} = q^2,\end{aligned}$$

hvor vi undervejs har indsat $\varepsilon^2 = 1 - q^2/p^2$. □

[P], Opgave 1.2.2. Vis at følgende kurver er parametriseret ved buelængde:

(1) $\gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}})$.
(2) $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$.

Løsning. Direkte udregning viser for den første kurve, at

$$\gamma'(t) = (\tfrac{1}{2}(1+t)^{1/2}, -\tfrac{1}{2}(1-t)^{1/2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),$$

så
$$\|\gamma'(t)\|^2 = \tfrac{1}{4}(1+t) + \tfrac{1}{4}(1-t) + \tfrac{1}{2} = 1$$
som ønsket. For den anden kurve gælder
$$\gamma'(t) = (-\tfrac{4}{5}\sin t, -\cos t, \tfrac{3}{5}\sin t),$$
så
$$\|\gamma'(t)\|^2 = \tfrac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t = 1.$$

■

[P], Opgave 1.3.2. Betragt kurven (tegning) hvis ligning i polære koordinater (r,θ) er
$$r = \sin\theta\tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$
Skriv en parametrisering af kurven ved at bruge θ som parameter og vis, at
$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right), \quad -1 < t < 1$$
er en reparametrisering.

Løsning. Vi har, at
$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\sin^2\theta, \sin^2\theta\tan\theta) =: \tilde{\gamma}(\theta)$$
virker til formålet. Blot ved at se på ligningerne får vi idéen at definere parameteren $t = \sin(\theta)$, hvilket giver en bijektion fra $(-\pi/2, \pi/2)$ til $(-1,1)$ med invers $\theta = \sin^{-1}(t)$. Da får vi
$$\gamma(t) := \tilde{\gamma}(\theta(t)) = (t^2, t^2\frac{\sin(\sin^{-1}(t))}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(t))}}) = (t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}).$$

■

[P], Opgave 1.3.3. Vi siger, at $\gamma(t_0)$ er en "ordinary cusp", hvis $\gamma'(t_0) = 0$, mens $\gamma''(t_0)$ og $\gamma'''(t_0)$ er lineært uafhængige. Vis

(1) Kurven $\gamma(t) = (t^m, t^n)$, hvor m,n er positive heltal, har en ordinary cusp i origo, hvis og kun hvis $(m,n) = (2,3)$ eller $(3,2)$.
(2) Vis at kurven fra forrige opgave har en ordinary cusp i origo.
(3) Hvis γ har en ordinary cusp i et punkt p, så har enhver reparametrisering af γ også.

Løsning. For den første, antag først at kurven er på en af de to givne former. Hvis $(m,n) = (2,3)$ er $\gamma'(0) = 0$, $\gamma''(0) = (2,0)$, $\gamma'''(0) = (0,6)$, så $\gamma(0) = 0$ er et ordinary cusp i dette tilfælde. Tilsvarende for $(3,2)$.

Antag omvendt, at $\gamma(0)$ er et ordinary cusp. At $\gamma'(0) = 0$ medfører, at $n > 1, m > 1$. Hvis $m = n = 2$, eller $m = n = 3$, eller hvis der gælder, at $m > 3$, $n > 3$, vil enten $\gamma''(0)$ eller $\gamma'''(0)$ være lig $(0,0)$, og de vil ikke være lineært uafhængige, så (m,n) er $(2,3)$ eller $(3,2)$.

Betragt nu kurven $\gamma(t) = (t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}})$ fra forrige opgave. Det er klart, at $\gamma'(0) = 0$, at $\gamma''(0) = (2,0)$, og $\gamma'''(0) = (0,6)$ (pr. produktreglen for differentiation).

For sidste del af opgaven, lad φ være en reparametriseringsafbildning og betragt $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$. Antag at γ har en ordinary cusp i $\varphi(t_0)$, og lad os vise, at $\tilde{\gamma}$ har det samme i t_0. Pr. kædereglen er
$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t) &= \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\tilde{\gamma}''(t) &= \gamma''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + \gamma'(\varphi(t))\varphi''(t) \\
\tilde{\gamma}'''(t) &= \gamma'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^3 + 3\gamma''(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi''(t) + \gamma'(\varphi(t))\varphi'''(t).
\end{aligned}$$
Af første linje læser vi, at $\tilde{\gamma}'(t_0) = 0$, da $\gamma'(\varphi(t_0)) = 0$. Sæt $a = \varphi'(t_0)$, $b = \varphi''(t_0)$. Da bliver de sidste to linjer
$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}''(t_0) &= a^2\gamma''(\varphi(t_0)) \\
\tilde{\gamma}'''(t_0) &= a^3\gamma'''(\varphi(t_0)) + 3ab\gamma''(\varphi(t_0)),
\end{aligned}$$

og at de to venstresider er lineært uafhængige følger af, at $\gamma''(\varphi(t_0))$ og $\gamma'''(\varphi(t_0))$ er det.

Her er det vigtigt, at $a \neq 0$, hvilket følger af det generelle faktum, at $\varphi'(t) \neq 0$ for alle t: Ved at differentiere ligningen

$$t = \varphi^{-1}(\varphi(t))$$

med hensyn til t fås ved brug af kædereglen, at

$$1 = (\varphi^{-1})'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

hvilket umuligt kan gælde, hvis $\varphi'(t)$ er 0. Bemærk, at det her er vigtigt, at den inverse funktion φ^{-1} også er differentiabel. ∎

[P], Opgave 1.5.1. Vis at kurven $\mathcal{C}$ med ligning

$$y^2 = x(1 - x^2)$$

ikke er sammenhængende. For hvilke t er

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{t - t^3})$$

er en parametrisering af $\mathcal{C}$? Hvad er billedet af denne parametrisering?

Løsning. Her siger vi, at en mængde i $\mathbb{R}^2$ er (kurve)sammenhængende, hvis to vilkårlige punkter kan forbindes med en glat kurve. Bemærk at $(-1, 0)$ og $(0, 0)$ ligger i $\mathcal{C}$. Vi påstår at disse to punkter ikke kan forbindes med en kurve. Antag at en sådan kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ findes. Da må der findes et t så $x(t) = -\frac{1}{2}$. Da bliver $y^2 = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}$, hvilket er umuligt.

Vi gætter på, at sidste del af spørgsmålet er følgende: For hvilke intervaller I er $\gamma(I) \subseteq \mathcal{C}$? (Man kunne stille samme spørgsmål om lighed mellem de to mængder, men da giver sidste del af opgaven ikke rigtig nogen mening.) Vi må først og fremmest udelade $t > 1$ og $0 > t > -1$, da der for sådanne t gælder, at $t - t^3 < 0$. Pånær i disse tilfælde gælder

$$y(t)^2 = t - t^3 = t(1 - t^2) = x(t)(1 - x(t)^2),$$

så $\gamma(I) \subseteq \mathcal{C}$ så længe $I \subseteq (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Sidste del af opgaven er en smule vagt formuleret, men vi bemærker, at vi umuligt kan ramme hele kurven, da $y(t) \geq 0$, men $\mathcal{C}$ indeholder punkter med negativ y-værdi; kurven er symmetrisk om x-aksen. ∎

Ugeseddelopgave. Lad $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ være en ortogonalmatrix og vis at

$$A(v \times w) = (\det A)(Av \times Aw)$$

for alle $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Bevis. Husk at krydsproduktet af v og w er den entydige vektor $v \times w$, så

$$(v \times w) \cdot u = \det(v, w, u).$$

for alle $u \in \mathbb{R}^3$. Lad $u \in \mathbb{R}^3$ være vilkårlig. Husk at $A^{-1} = A^T$, da A er ortogonal. Vi har da, at

$$\begin{aligned}(A^{-1}(\det A)(Av \times Aw)) \cdot u &= ((\det A)(Av \times Aw)) \cdot (Au) = (\det A)((Av \times Aw) \cdot (Au)) \\ &= (\det A)\det(Av, Aw, Au) = (\det A)^2 \det(v, w, u) = \det(v, w, u),\end{aligned}$$

så fra entydigheden følger fra bevisets første ligning, at

$$v \times w = A^{-1}(\det A)(Av \times Aw)$$

som ønsket. ∎