Noter til Analyse-TØ uge 45

9. november 2011

Quiz 1.10. *Lad $\{a_n\}$ være en konvergent følge med grænseværdi a og $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en bijektion. Så er $\{a_{f(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ også konvergent med grænseværdi a.*

Bevis. Lad $\epsilon > 0$ være givet. Da $\{a_n\}$ er konvergent, kan vi vælge $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, så $|a_n - a| \leq \varepsilon$ for alle $n \geq \tilde{N}$.

Vælg N så $f(n) \geq \tilde{N}$ for alle $n \geq N$. Dette er muligt, for hvis intet sådant N eksisterede, ville der eksistere uendeligt mange n med $f(n) < \tilde{N}$. Med andre ord ville mængden $A = \{n \mid f(n) < \tilde{N}\}$ være uendelig. Da f er en bijektion, er derfor også $f(A)$ uendelig, men $f(A) \subseteq \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}$, hvilket giver en modstrid, da en uendelig mængde ikke kan være indeholdt i en endelig.

Nu gælder så, at $|a_{f(n)} - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$, hvilket betyder at $\{a_{f(n)}\}$ er konvergent. ■

Opgave 2. *Lad $\{a_n\}$ være en reel talfølge og vis at $\{a_n\}$ er konvergent hvis og kun hvis der findes et $a \in \mathbb{R}$, så der for hvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, når $n \geq N$.*

Bevis. Bemærk først at betingelsen $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ er ækvivalent til, at $|a_n - a| < \varepsilon$, pr. definition af numerisk værdi. Opgaven siger derfor, at det er ligegyldigt, om vi skriver $|a - a_n| < \varepsilon$ eller $|a - a_n| \leq \varepsilon$ i definitionen på konvergens. Vi skal vise to implikationer.

Antag først at $\{a_n\}$ er konvergent med grænseværdi a. Bemærk først, at grænseværdien er reel (for antag ellers, at $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ og nå en modstrid). Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad os vise, at vi kan finde et $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n - a| < \varepsilon$. Da $\{a_n\}$ er konvergent, kan vi finde et $N \in \mathbb{N}$, der afparerer $\varepsilon/2$. Med andre ord kan vi finde et $N \in \mathbb{N}$, så

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

for $n \geq N$. Da $\varepsilon/2 < \varepsilon$ får vi derfor, at

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

hvilket er det, vi skulle vise.

Omvendt, antag nu, at der findes $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n - a| < \varepsilon$ for $n \geq N$. Da gælder specielt, at $|a_n - a| \leq \varepsilon$ for $n \geq N$, hvilket betyder, at $\{a_n\}$ er konvergent. ■

Opgave 4. *Lad $\{a_n\}$ være konvergent med grænse a. Lad $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og gør rede for at mængden*

$$\{k \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \leq 1/m \ \forall n \geq k\}$$

har et mindste element n_m. Antag at følgen $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ er konvergent. Gør rede for, at $\{a_n\}$ er konstant fra et vist trin*; dvs. at der findes $N \in \mathbb{N}$ så $a_n = a$ for $n \geq N$.*

Løsning. Da $\{a_n\}$ er konvergent, findes et N (afhængende af m) så

$$|a_n - a| \leq 1/m$$

for $n \geq N$. Tag det mindste N der virker – dette er præcist det efterspurgte n_m.

Bemærk nu, at enhver konvergent følge af naturlige tal er konstant fra et vist trin. Det var indholdet af beviset for en af opgaverne i Quiz 1, så specielt er følgen $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ konstant fra et vist trin, da denne var antaget konvergent. Lad $k = \lim_{m\to\infty} n_m$ være denne konstant. For $n \geq k$ gælder nu, at $|a_n - a| \leq 1/m$ for *alle* m på én gang. Dette er kun muligt, hvis $|a_n - a| = 0$, hvilket omvendt betyder, at $a_n = a$. Heraf følger påstanden. ∎

Opgave 5. *Definer følgen* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *rekursivt ved* $x_0 = 1$ *og*

$$x_n = \tfrac{1}{10}x_{n-1} + x_{n-1}\sin x_{n-1}.$$

Vis at følgen er konvergent og find grænseværdien.

Bevis. Vi påstår, at

$$0 \leq x_n \leq \left(\frac{1}{10} + \sin(1)\right)^n \tag{1}$$

for alle n. Dette kan ses induktivt: For $n = 0$ bliver (1) til vurderingen

$$0 \leq 1 \leq 1,$$

der tydeligvis er sand. Antag nu induktivt ulighederne i (1) for $n = k$ og lad os vise dem for $n = k + 1$. Da der da specielt gælder, at $0 \leq x_k \leq 1$, er både $\frac{1}{10}x_k$ og $x_k \sin(x_k)$ ikke-negative, så x_{k+1} er ikke-negativ, hvilket viser den første ulighed. Den anden følger af vurderingerne

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_n\left(\frac{1}{10} + \sin(x_n)\right) &\leq \left(\frac{1}{10} + \sin(1)\right)^n \left(\frac{1}{10} + \sin(x_n)\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{10} + \sin(1)\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Her har vi brugt, at sin er voksende på intervallet $[0, 1]$.

Påstanden fra opgaven følger nu fra det såkaldte Klemmelemma, som vi viser til næste TØ-gang (Opg. 1.18). Lemmaet siger, at en følge (vores $\{x_n\}$), som er klemt inde mellem to talfølger, der konvergerer mod det samme (i vores tilfælde den konstant talfølge 0 og følgen $(1/10+\sin(1))^n$, som konvergerer mod 0, da $1/10 + \sin(1) < 1$), vil konvergere mod hvad end de to følger konvergerer imod (i vores tilfælde 0). Med andre ord, $\{x_n\}$ er konvergent med grænseværdi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ∎